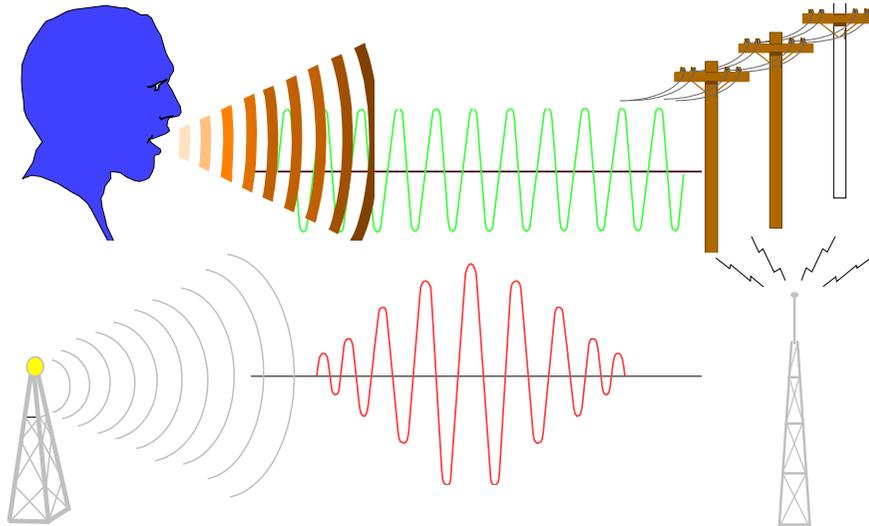


Formelsammlung

Nachrichtentechnik

Inhaltsverzeichnis

| | |
|-----------------------------|----|
| | 1 |
| 1. Digitale Daten..... | 2 |
| 2. Signale..... | 3 |
| 3. Leitungstheorie..... | 8 |
| 4. Modulation..... | 12 |
| 5. Filter..... | 14 |
| 6. Digitalfilter..... | 17 |
| 7. Up and Downsampling..... | 18 |
| 8. Pulse Shaping..... | 19 |



Autor: Drifte Marcel

Datum: 19. Nov. 2006

Dokumentname: **NachrTech.sxw** (*openoffice.org*)

Dokument zu finden unter: **www.formelsammlung.telabo.ch**

1. Digitale Daten

1.1 Entscheidungsgehalt pro Zeichen

| | | | |
|-------------------|-----------------------------|-----------------------|-------|
| $H_0 = \log_2(N)$ | N | : Zeichenvorrat | [] |
| Siehe auch 1.9 | H_0 | : Entscheidungsgehalt | [bit] |
| | z.B. ASCII N=256 => $H_0=8$ | | |

1.2 Informationsgehalt eines Zeichen

| | | | |
|--|-------|---|--------|
| $H_i = \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$ | p_i | : Häufigkeit des Auftretens des i-ten Zeichen | [0..1] |
| | H_i | : Entscheidungsgehalt eines Zeichens | [bit] |

1.3 Mittlerer Informationsgehalt pro Zeichen

| | | | |
|----------------------------------|-------|---|--------|
| $H = \sum_{i=1}^N p_i \cdot H_i$ | N | : Anzahl Zeichen | [] |
| Es gilt immer: | p_i | : Häufigkeit des Auftretens des i-ten Zeichen | [0..1] |
| $H \leq H_0$ | H_i | : Entscheidungsgehalt eines Zeichens | [bit] |
| | H | : mittlerer Informationsgehalt | [bit] |

1.4 Codierung und Redundanz

1.4.1 Mittlere Codewortlänge

| | | | |
|----------------------------------|-------|---|--------|
| $L = \sum_{i=1}^N p_i \cdot L_i$ | N | : Anzahl Zeichen | [] |
| Es gilt: | L | : Mittlere Codewortlänge | [bit] |
| $L \geq H$ | p_i | : Häufigkeit des Auftretens des i-ten Zeichen | [0..1] |
| | L_i | : Codewortlänge des i-te Zeichen | [bit] |
| | H | : mittlerer Informationsgehalt | [bit] |

1.4.2 Absolute Redundanz

| | | | |
|-------------|---|--------------------------------|-------|
| $R = L - H$ | R | : Absolute Redundanz | [bit] |
| | H | : mittlerer Informationsgehalt | [bit] |
| | L | : Mittlere Codewortlänge | [bit] |

1.4.3 Relative Redundanz

| | | | |
|---------------------|---|--------------------------------|--------|
| $r = \frac{R}{L}$ | R | : Absolute Redundanz | [bit] |
| $r = \frac{L-H}{L}$ | r | : Relative Redundanz | [0..1] |
| | H | : mittlerer Informationsgehalt | [bit] |
| | L | : Mittlere Codewortlänge | [bit] |

1.4.4 Mittlere Zeichendauer

| | | | |
|--|-----------|---|--------|
| $T_Z = \sum_{i=1}^N p_i \cdot T_{Z_i}$ | T_Z | : Mittlere Zeichendauer | [s] |
| | T_{Z_i} | : Dauer des i-ten Zeichens | [s] |
| | p_i | : Häufigkeit des Auftretens des i-ten Zeichen | [0..1] |

1.5 Optimale Codierung nach Huffman

Idee: Sortieren nach Häufigkeit

Vorgehen:

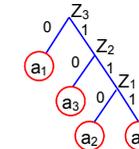
- Sortiere Zeichen nach Häufigkeit
- Fasse die 2 mit der kleinsten Häufigkeit zusammen zu einem neuen Gruppe und Summiere die Häufigkeit.
- Sortier Zeichen neu
- Gehe zu Schritt 2 bis nur noch 2 Zeichen oder Gruppen in der Liste sind.
- Erstelle Binärbaum und beginne mit Liste mit 2 Einträgen bis zum Schluss.

BEM: Damit Code entzifferbar ist dürfen Zeichen nur als Blätter des Codebaumes auftreten.

BSP:

| | | | | | |
|-------|-------|----------|--------------|-----------|-------------------|
| X_i | p_i | X_i | p_i | X_i | p_i |
| a_1 | p_1 | a_1 | p_1 | a_1 | p_1 |
| a_3 | p_3 | a_{24} | $p_{2+ p_4}$ | a_{243} | $p_{2+ p_4+ p_3}$ |
| a_2 | p_2 | a_3 | p_3 | | |
| a_4 | p_4 | | | | |

Codebaum



1.6 Prüf- und korrigierbare Codes

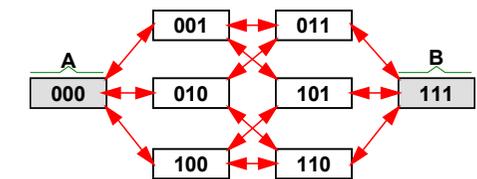
- Merkmale:**
- Meist Code mit fester Länge
 - Unvollständige Code Tabelle
- Im Falle des 3 Bit Code gilt:
- Erkennung von 2 bit Fehlern
 - Hamin Abstand $d_{min}=3$

Haming Abstand:
 $d_{min} =$ kürzeste Distanz zwischen den Punkten A-B. Es werden die Strecken gezählt.

Es gilt:

$$q < d$$

BSP 3Bit Code für 2 Zeichen {A,B}



d_{min} : Haming Abstand []
 q : Vielfachheit []

1.7 Maximale Datenrate über über eine Analog Verbindung (TF)

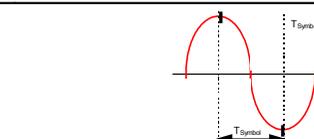
Die maximale Datenrate ist abhängig von der Bandbreite sowie dem Störabstand SNR

Symbolabstand:

$$T_{Symbol} = \frac{1}{2 \cdot B}$$

dh. max 2 Symbole pro Hz

Baudrate siehe 1.8



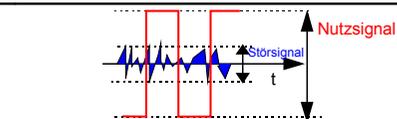
B : Bandbreite [Hz]
 T_{Symbol} : Symbolabstand [s]

Unterscheidbare Signalpegel nach Shanon

$$N = \sqrt{1 + \frac{P_{Nutz}}{P_{Stoer}}}$$

$P_{Stoer} \ll P_{Nutz}$

$$N \approx \sqrt{\frac{P_{Nutz}}{P_{Stoer}}}$$



P_{Nutz} : Nutzsignal [W]
 P_{Stoer} : Störsignal [W]
 N : Anzahl Signalpegel / Symbole []

1.8 Baudrate

| | |
|------------------------------------|---|
| $Q' = \frac{1}{T_{\text{Symbol}}}$ | Q' : Baudrate [bit/s] |
| $Q' = 2 \cdot B$ | B : Bandbreite [Hz] |
| | T _{Symbol} : Symbolabstand [s] |
| Siehe auch 1.12 | |

1.9 Entscheidungsgehalt pro Symbol

| | |
|--|--|
| $H_0 = \log_2(N) \approx \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{Stör}}}\right)$ | N : Anzahl Symbole [] |
| $H_0 = \frac{1}{2} \frac{\text{SNR}_{\text{dB}}}{10 \cdot \log(2)}$ | H ₀ : Entscheidungsgehalt [bit] |
| $H_0 \approx \frac{\text{SNR}_{\text{dB}}}{6}$ | P _{Nutz} : Nutzsignal [W] |
| | P _{Stör} : Störsignal [W] |
| | SNR : (Signal to noise ration) [dB] |

1.10 Signal-Rausch Abstand

| | |
|--|-------------------------------------|
| SNR (Signal to noise ration) | P _{Nutz} : Nutzsignal [W] |
| $\text{SNR} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{Stör}}}\right)$ | P _{Stör} : Störsignal [W] |
| | SNR : (Signal to noise ration) [dB] |

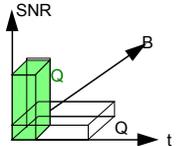
1.11 Mittlerer Nachrichtenfluss / Informationsfluss

| | |
|--------------------------------------|--|
| $H' = \frac{H_0}{T_{\text{Symbol}}}$ | H ₀ : Entscheidungsgehalt [bit] |
| $H' = \frac{B \cdot \text{SNR}}{3}$ | B : Bandbreite [Hz] |
| | H' : Mitt. Nachrichtenfluss [Bit/s] |
| | T _{Symbol} : Symbolabstand [s] |
| | SNR : (Signal to noise ration) [dB] |

1.12 Kanalkapazität (Baudrate)

| | |
|--|-------------------------------------|
| $C = 2 \cdot B \cdot \log_2(N)$ | N : Anzahl Symbole siehe 1.7 [] |
| $C \approx \frac{B \cdot \text{SNR}_{\text{dB}}}{3}$ | C=H' : Signal Kapazität [Bit/s] |
| | B : Bandbreite [Hz] |
| | SNR : (Signal to noise ration) [dB] |
| Siehe auch 1.8 | |

1.13 Nachrichten Quader

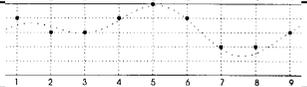
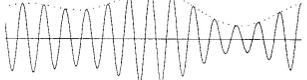
| | |
|---|---|
| $Q = \frac{1}{3} B \cdot \text{SNR} \cdot dt$ | |
| |  |
| | B : Bandbreite [Hz] |
| | SNR : (Signal to noise ration) [dB] |
| | t : Zeit [s] |

2. Signale

2.1 Signal Klassifizierung

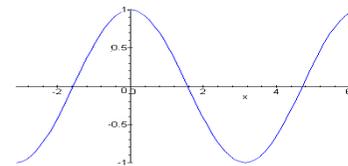
| Klasse | Beschreibung |
|------------------|--|
| determiniert | Signalverlauf von $-\infty \dots \infty$ bekannt |
| stochastisch | Signalverlauf ist zufällig und nur ausschnittsweise bekannt. Der Ausschnitt sollte eine rep. Stichprobe des gesamten Signals sein. |
| Leistungssignal | Unendliche Energieinhalt von $-\infty \dots \infty$ |
| Energiesignal | Einmaliges Signal mit endlichem Energieinhalt |
| periodisch | Ein sich wiederholender Signalverlauf |
| nicht periodisch | Signalverlauf nicht periodisch. Es kann sich um ein Leistungs- oder Energiesignal handeln |

2.2 Signalarten

| Signalart | Eigenschaften | Bild |
|-------------|--|---|
| Analog | Wert: kontinuierlich Zeit: kontinuierlich |  |
| Quantisiert | Wert: diskret Zeit: kontinuierlich |  |
| Abgetastet | Wert: kontinuierlich Zeit: diskret |  |
| Digital | Wert: diskret Zeit: diskret |  |
| Moduliert | |  |

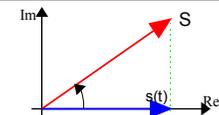
2.3 Harmonische Schwingung (Einton Signal)

| | |
|-------------------------|--|
| Spezifikationsparameter | \hat{S} : Amplitude [] |
| | f : Frequenz [Hz] |
| | φ : Phase [rad] |
| | Abmachung: $\cos(\varphi) = 1 \quad \forall \quad \varphi = 0$ |



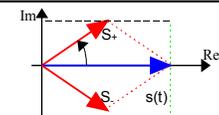
Einzeiger Darstellung

$$S = \hat{S} \cdot e^{j(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)}$$

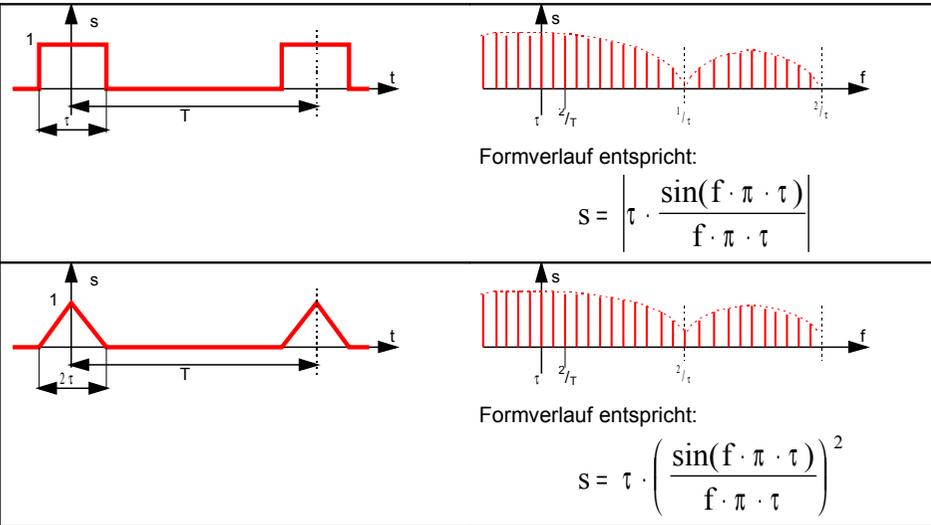


Zweizeiger Darstellung

$$S = \frac{\hat{S}}{2} \cdot e^{j(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)} + \frac{\hat{S}}{2} \cdot e^{-j(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)}$$



2.4 Linienspektren



2.4.1 Spektrum „einmaliger“ Signale

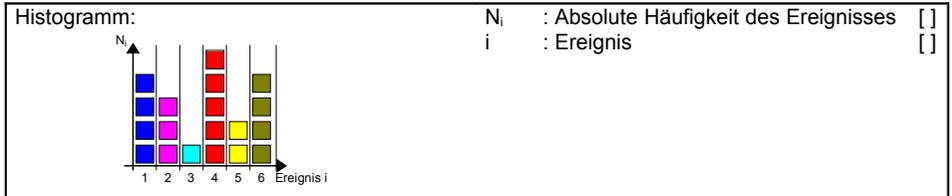


2.4.2 Fouriertransformation von Leistungsignalen

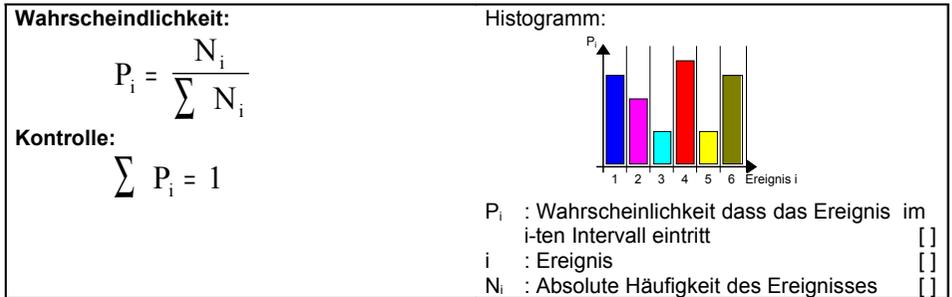
$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right)$$

2.5 Stochastische Signale

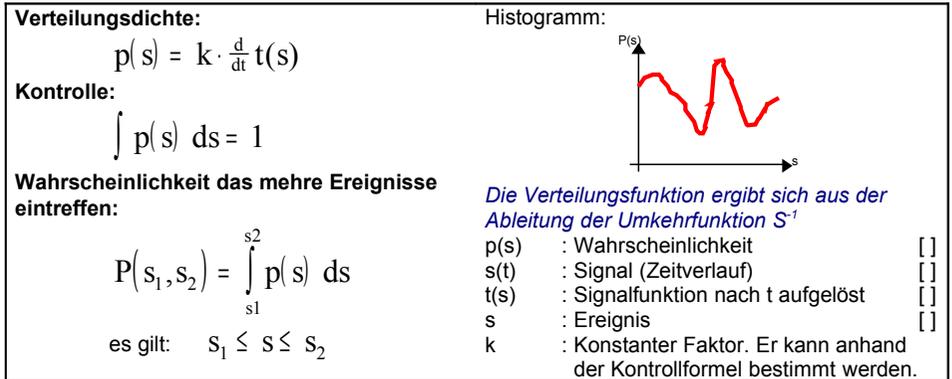
2.5.1 Absolute Häufigkeitsverteilung



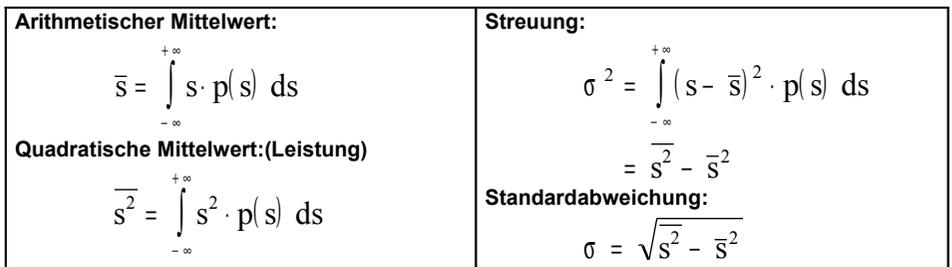
2.5.2 Relative Häufigkeitsverteilung / Diskrete Häufigk.verteilung



2.5.3 Verteilungsdichte



2.5.4 Statische Kennzahlen



2.5.5 Typische Verteilfunktionen

| | |
|--|--|
| Allgemeine Gleichverteilung | |
| Einseitige Gleichverteilung | |
| Symmetrische Gleichverteilung | |
| Normal- /Gaussverteilung Allgemeine Form: $p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\bar{s})^2}{2\sigma^2}}$ Normierte Form: $p(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \quad \lambda = \frac{s-\bar{s}}{\sigma}$ Entspricht der Form $\bar{s}=0$ und $\sigma=1$ | p(s) : Wahrscheinlichkeit [] sigma : Standardabweichung siehe 2.5.4 s-bar : Aritmetische mittel siehe 2.5.4 s : Ereignis [] |

2.6 Zeitmittelwert

2.6.1 Linearer Mittelwert

| | |
|---|---|
| Aus der Zeitfunktion $\bar{s} = \frac{1}{T} \int_T s(t) dt$ | Aus der Verteilungsdichte $\bar{s} = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot p(s) ds$ |
| Aus den Fourier Koeffizienten $\bar{s} = a_0$ | a ₀ : Fourier Koeffizienten [] s(t) : Signalfunktion [] t : Zeit [s] T : Periode [s] p(s) : Wahrscheinlichkeit [] s : Ereignis [] |

2.6.2 Signalleistung

| | |
|---|--|
| Aus der Zeitfunktion $P = \overline{s^2} = \frac{1}{T} \int_T s^2(t) dt$ | P : Signalleistung [V ²] c _n : kompl. Fourierkoeffizienten [V] t : Zeit [s] T : Periode [s] p(s) : Wahrscheinlichkeit [] s : Ereignis [] |
| Aus den Fourier Koeffizienten $P = \sum c_n ^2$ <small>Summe aller Koeffizienten</small> | |
| Aus der Dichteverteilung $P = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 \cdot p(s) ds$ | |
| Aus dem Leistungsspektrum $P = \int_{-\infty}^{+\infty} L_s(f) df$ | |

2.6.3 Effektivwert

| | |
|-----------------------------|---|
| $s_{\text{eff}} = \sqrt{P}$ | P : Leistung [V ²] s _{eff} : Spannung [V] |
|-----------------------------|---|

2.7 Korrelation

2.7.1 Definition

Korrelationsfunktion charakterisiert die Ähnlichkeit zweier Signale in Abhängigkeit eines Zeitlichen versatzes τ .

Es wird unterschieden zwischen:

- **Kreuzkorrelation:** Zwei unabhängige Signale werden verglichen und
- **Autokorrelation:** Das Signal wird mit sich selbst verglichen.

MatLab: `xcorr(sx,sy)`

2.7.2 Korrelation zweier Leistungssignale

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_x(t) \cdot s_y(t + \tau) dt$$

τ : Versatz der Signale untereinander [s]
 s : Signal [V]
 t : Zeit [s]

2.7.3 Korrelation mit einem Energiesignal (eines oder beide)

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(t) \cdot s_y(t + \tau) dt$$

τ : Versatz der Signale untereinander [s]
 s : Signal [V]
 t : Zeit [s]

2.8.1 Absoluter Pegel

Spannungspegel: **Bezugsgröße:** Signal 1mW und $R_L=600 \Omega$

$$L_u = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_x}{0.7746V}\right)$$

L_u : Spannungspegel [dBm]
 L_i : Strompegel [dBm]
 L : Leistungspegel [dBm]

Strompegel:

$$L_i = 20 \cdot \lg\left(\frac{I_x}{1.29 \cdot 10^{-3} A}\right)$$

Leistungspegel

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_x}{1 \cdot 10^{-3} W}\right)$$

2.8.2 Relativer Pegel

Spannungspegel in dB

$$L_u = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_x}{U_0}\right)$$

L_u : Spannungspegel [dB]
 L_i : Strompegel [dB]
 L : Leistungspegel [dB]

Strompegel in dB

$$L_i = 20 \cdot \lg\left(\frac{I_x}{I_0}\right)$$

Leistungspegel in dB

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_x}{P_0}\right)$$

Spannungspegel in Np

$$L_u = 20 \cdot \ln\left(\frac{U_x}{U_0}\right)$$

L_u : Spannungspegel [Np]
 L_i : Strompegel [Np]
 L : Leistungspegel [Np]

Strompegel in Np

$$L_i = 20 \cdot \ln\left(\frac{I_x}{I_0}\right)$$

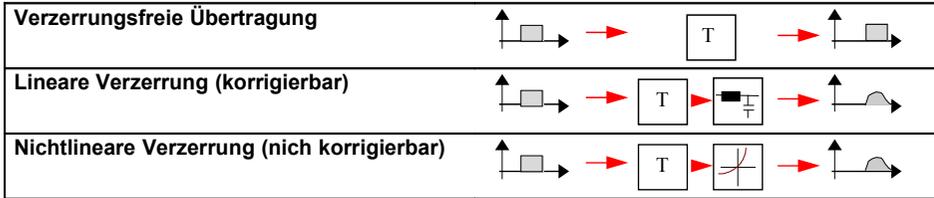
Umrechnung:

1 Np = 8.688 dB
 1dB = 0.1151 Np

Leistungspegel in Np

$$L = 10 \cdot \ln\left(\frac{P_x}{P_0}\right)$$

2.9 Übertragungsverhalten von 2 Toren



2.9.2 Klirrfaktor

Spannungssignale

$$k = \sqrt{\frac{S_2^2 + S_3^2 + \dots}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \dots}}$$

\hat{S}_i : Amplituden der Harm. (Fourierkoef.) [V]
 $\hat{S}_i^2 = P$: Signalleistung [V²]
 k : Klirrfaktor []

Aus dem Leistungssignalen Der Gleichspannungsteil wird ignoriert

$$k = \sqrt{\frac{P_2 + P_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}}$$

Messtechnisch

$$k = \sqrt{\frac{P_{tot} - P_{DC} + P_1}{P_{tot} - P_{DC}}}$$

P_1 : Leistung der Grundharmonischen [W]
 P_{tot} : Gesamtleistung des Signals [W]
 P_{DC} : Leistung des DC Anteils [W]

2.9.3 Intermodulationsmessungen

Die optimale Kurve des Verzerrungsgliedes wäre ein Quadratischekurve

Intermodulationsgrad:

$$m = \frac{\hat{U}_{NF}}{\hat{U}_{HF}}$$

m ist häufig in %

2.10 Digitale Signale

2.10.1 Digitalisierung

Die Digitalisierung setzt sich aus folgenden Schritten zusammen

1. Abtastung
2. Quantisierung
3. Codierung

2.10.2 Abtastung

Abtastfrequenz : $f_s = 1/T_s$
 Abtastperiode : T_s
 Aperturzeit : t_a
 Sample Hold :

2.10.3 Quantisierung

Quantisierungsfehler:

$\epsilon = \text{Quantisierungsfehler}$

2.10.4 Spektrum einer Holdschaltung D/A Wandler

f_s : Abtastfrequenz [Hz]
 f : Frequenz [Hz]

$$|\text{sinc } c| = \frac{|\sin(2\pi \cdot f \cdot \frac{1}{f_s})|}{2\pi \cdot f \cdot \frac{1}{f_s}}$$

3. Leitungstheorie

3.1 Leitungsbeläge

| | |
|--|---|
| Widerstandsbelag $R' = \frac{dR}{dx}$ | C' : Kapazitätsbelag [F/m] |
| Ableitungsbelag $G' = \frac{dG}{dx}$ | G' : Ableitungbelag [S/m] |
| Induktivitätsbelag $L' = \frac{dL}{dx}$ | L' : Induktivitätsbelag [H/m] |
| Kapazitätsbelag $C' = \frac{dC}{dx}$ | R' : Widerstandsbelag [Ω/m] |
| Paralleldrahtleitung $C' = \frac{\pi \epsilon}{\ln(\frac{a}{r})}$ $L' = \frac{\mu}{\pi} \ln(\frac{a}{r} + k)$ | a : Leiterabstand [m] r : Radius [m] k : Korrekturterm ($k \rightarrow 0$ für $f \rightarrow \infty$) [] ϵ : Dielektrizitätskonstante [AS/Vm] μ : Permeabilität [Vs/Am] |
| Koaxialkabel $C' = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(\frac{d_a}{d_i})}$ $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln(\frac{d_a}{d_i} + k)$ | d_a : Aussendurchmesser [m] d_i : Innendurchmesser [m] k : Korrekturterm ($k \rightarrow 0$ für $f \rightarrow \infty$) [] ϵ : Dielektrizitätskonstante [AS/Vm] μ : Permeabilität [Vs/Am] |
| Es gilt: $L' C' = \mu \cdot \epsilon$ | C' : Kapazitätsbelag [F/m] L' : Induktivitätsbelag [H/m] |

3.2 Allgemeine Leitungsgleichungen

| |
|--|
| Für die Spannung $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = R' G' u(x,t) + (R' C' + G' L') \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ |
| Für den Strom $\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = R' G' i(x,t) + (R' C' + G' L') \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}$ |
| C' : Kapazitätsbelag [F/m] G' : Ableitungbelag [S/m] $i(x,t)$: Strom zum Zeitpunkt t am Ort x [A] L' : Induktivitätsbelag [H/m] R' : Widerstandsbelag [Ω/m] t : Zeit [s] $u(x,t)$: Spannung zum Zeitpunkt t am Ort x [V] x : Leitungsposition [m] |

3.3 Verlustlose Leitung

Voraussetzung: $R'=0, G'=0$ bzw $R' \ll \omega \cdot L', G' \ll \omega \cdot C'$

| | |
|-------------------------|------------------------------|
| Für die Spannung | C' : Kapazitätsbelag [F/m] |
| | G' : Ableitungbelag [S/m] |

| | |
|--|--|
| $u(x,t) = u_h(t - \frac{x}{v}) + u_r(t + \frac{x}{v})$ | i_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [A] |
| Für den Strom $i(x,t) = i_h(t - \frac{x}{v}) - i_r(t + \frac{x}{v})$ | i_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [A] |
| Wellengeschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$ | L' : Induktivitätsbelag [H/m] R' : Widerstandsbelag [Ω/m] t : Zeit [s] u_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [V] u_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [V] v : Wellengeschwindigkeit [m/s] x : Position [m] |

3.3.1 Wellenwiderstand in verlustlosen Leitung

| | |
|--|--|
| Es gilt allgemein: $u_h = R_w \cdot i_h$ $u_r = R_w \cdot i_r$ | C' : Kapazitätsbelag [F/m] i_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [A] i_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [A] L' : Induktivitätsbelag [H/m] R_w : Wellenwiderstand [Ω] u_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [V] u_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [V] v : Wellengeschwindigkeit [m/s] |
| Wellenwiderstand $R_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad R_w = \frac{1}{C' \cdot v}$ | |

3.3.2 Messbare Grösse am Punkt x im Zeitpunkt t

| | |
|--|---|
| Spannung: $u(x,t) = u_h(x,t) + u_r(x,t)$ | i : Strom [A] i_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [A] i_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [A] |
| Strom: $i(x,t) = i_h(x,t) - i_r(x,t)$ | p : Leistung [W] t : Zeit [s] u : Spannung [V] u_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [V] u_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [V] |
| Leistung: $p(x,t) = p_h(x,t) - p_r(x,t)$ | x : Leitungsposition [m] |

3.3.3 Reflexion am Leitungsende / Anfang auf verlustloser Leitung

| | |
|--|--|
| Reflexion hinlauf. Welle am Leitungsende $r_L = \frac{R_L - R_w}{R_L + R_w}$ | r_L : Reflexionsfaktor Last [-1...1] r_Q : Reflexionsfaktor Quelle [-1...1] R_w : Wellenwiderstand [Ω] |
| Ende kurzgeschlossen: Es gilt: $u_r = r_L \cdot u_h \quad i_r = r_L \cdot i_h$ $r = -1$ | |
| Reflexion rückl. Welle am Leitungsanfang $r_Q = \frac{R_Q - R_w}{R_Q + R_w}$ | Ende offen: $r = 1$ |
| Es gilt: $u_h = r_Q \cdot u_r \quad i_h = r_Q \cdot i_r$ | |

3.3.4 Sinusförmige Signale auf verlustloser Leitung

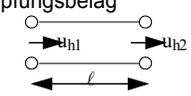
| | |
|---|--|
| Phasengeschwindigkeit | ω : Frequenz [rad/s] |
| $v_p = v = \frac{1}{\sqrt{L'C}}$ | β : Phasenbelag [m] |
| Phasenbelag | λ : Wellenlänge [m] |
| $\beta = \frac{\omega}{v} = \omega \cdot \sqrt{L'C}$ | λ_0 : Wellenlänge Licht [m] |
| Wellenlänge | μ_r : Permeabilitätszahl [] |
| $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$ | ϵ_r : Permittivitätszahl [] |
| Verkürzungsfaktor | c : Lichtgeschwindigkeit [m/s] |
| $k = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_p}{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}$ | C' : Kapazitätsbelag [F/m] |
| | f : Frequenz [Hz] |
| | k : Verkürzungsfaktor [] |
| | L' : Induktivitätsbelag [H/m] |
| | v_p, v : Phasengeschwindigkeit [m/s] |

3.3.5 Eingangsimpedanz auf verlustloser Leitung

| | |
|---|--|
| Eingangsimpedanz der Leitung | ℓ : Leitungslänge [m] |
| $Z_{Ein} = R_w \frac{1 + r_L e^{-j\beta \cdot 2 \cdot \ell}}{1 - r_L e^{-j\beta \cdot 2 \cdot \ell}}$ | β : Phasenbelag [] |
| $Z_{Ein} = Z_L \frac{1 + j \frac{R_w}{Z_L} \tan(\beta \cdot \ell)}{1 + j \frac{R_w}{Z_L} \tan(\beta \cdot \ell)}$ | r_L : Reflexionsfaktor Last [-1...1] |
| Eingangsimpedanz ende kurzgeschlossen | r_Q : Reflexionsfaktor Quelle [-1...1] |
| $Z_{Ein0} = j \cdot R_w \cdot \tan(\beta \cdot \ell)$ | R_w : Wellenwiderstand [Ω] |
| Eingangsimpedanz ende offen | Z_{Ein} : Eingangsimpedanz [Ω] |
| $Z_{Ein\infty} = -j \cdot R_w \cdot \cot(\beta \cdot \ell)$ | Z_L : Lastimpedanz [Ω] |

3.4.1 Sinusförmige Signale auf verlustbehafteter Leitung

| | |
|---|---|
| Übertragungsbelag | α : Dämpfungsbelag [Np] |
| $\gamma = \alpha + j\beta$ | β : Phasenbelag [m] |
| $\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')}$ | γ : Übertragungsbelag [rad/s] |
| Dämpfungsbelag / Dämpfungskoeffizient | ω : Frequenz [Hz] |
| $\alpha = \text{Re}(\gamma)$ | f : Frequenz [Hz] |
| Phasenbelag / Phasenkoeffizient | L' : Induktivitätsbelag [H/m] |
| $\beta = \text{Im}(\gamma)$ | C' : Kapazitätsbelag [F/m] |
| Wellenimpedanz | Z_w : Wellenwiderstand [Ω] |
| $Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$ | ϵ_r : Permittivitätszahl [] |
| Reflexionsfaktor der Last | μ_r : Permeabilitätszahl [] |
| $r_L = \frac{Z_L - Z_w}{Z_L + Z_w}$ | c : Lichtgeschwindigkeit [m/s] |
| Reflexionsfaktor der Quelle | Z_L : Lastimpedanz [Ω] |
| $r_Q = \frac{Z_Q - Z_w}{Z_Q + Z_w}$ | ℓ : Leitungslänge [m] |
| Leitungsdämpfung | r_L : Reflexionsfaktor der Last [] |
| $A = \alpha \cdot \ell$ | r_Q : Reflexionsfaktor der Quelle [] |
| | R' : Widerstandsbelag [Ω/m] |
| | G' : Ableitungsbelag [S/m] |
| | Z_Q : Quellenwiderstand [Ω] |
| | Z_L : Lastwiderstand [Ω] |
| | A : Dämpfung [dB] |
| | ℓ : Leitungslänge [m] |
| | α : Dämpfungsbelag [Np] |



3.4.2 Eingangsimpedanz auf verlustbehafteter Leitung

| | | | |
|---|-----------|---------------------------|--------------|
| Eingangsimpedanz | r_L | : Reflexionsfaktor Last | [-1...1] |
| $Z_{Ein} = \frac{u_1}{i_1}$ | r_Q | : Reflexionsfaktor Quelle | [-1...1] |
| $Z_{Ein} = Z_w \frac{1+r_L \cdot e^{-\gamma \cdot 2\ell}}{1-r_L \cdot e^{-\gamma \cdot 2\ell}}$ | Z_{Ein} | : Eingangsimpedanz | [Ω] |
| | Z_w | : Wellenwiderstand | [Ω] |
| | ℓ | : Leitungslänge | [m] |
| | γ | : Übertragungsbelag | |

Eingangsimpedanz ende kurzgeschlossen

$$Z_{Ein0} = Z_w \cdot \tanh(\gamma \cdot \ell)$$

Eingangsimpedanz ende offen

$$Z_{Ein\infty} = Z_w \cdot \coth(\gamma \cdot \ell)$$

3.5 Stehwellenverhältnis (VSWR)

| | |
|--|--|
| $VSWR = \frac{\hat{u}_{max}}{\hat{u}_{min}}$ | |
| $VSWR = \frac{u_h + u_r}{u_h - u_r}$ | |
| $VSWR = \frac{1 + r_L }{1 - r_L }$ | |

VSWR : Stehwellenverhältnis []
(Häufig in dB angegeben)

| | | |
|-------|------------------------------------|----------|
| r_L | : Reflexionsfaktor Last | [-1...1] |
| u_h | : Summe aller hinlaufenden Wellen | [V] |
| u_r | : Summe aller rücklaufenden Wellen | [V] |

3.6 Leitungsverzweigungen

$$r_1 = \frac{(R_{w2} \parallel R_{w3}) - R_{w1}}{(R_{w2} \parallel R_{w3}) + R_{w1}}$$

r_1 : Reflexionsfaktor []

3.7 Beispiel eines Wellenfahrplans

| | | |
|--------|-------------------------------|-----|
| ℓ | : Leitungslänge | [m] |
| x | : Position vom Leitungsanfang | [m] |
| t | : Zeit | [s] |

4. Modulation

4.1 Amplituden modulierte Signale

| |
|--|
| <p>AM (Amplitudenmoduliert klas.) DSB (Double Side Band)</p> |
| <p>ZM (Zweiseitenband moduliert ohne Träger) DSBSC (Double Side Band suppressed carrier)</p> |
| <p>EM (Einseitenband moduliert) SSB(SC) (Sigel Side Band)</p> |

4.2 Mischen von zwei Signalen

Gemischtes Signal

$$S(t) = \alpha_M \cdot S_M(t) \cdot S_T(t)$$

α_M : Modulationssteilheit []
(Verstärkung des Modulators)

4.3 Klassische Amplitudenmodulation AM

HF Träger

$$S_T(t) = \hat{S}_T \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t)$$

NF Signal

$$S_M(t) = \hat{S}_M \cos(2\pi \cdot f_M \cdot t)$$

Moduliertes Signal

$$S_{AM}(t) = \hat{S}_T \left(1 + m \frac{S_M(t)}{\hat{S}_M} \right) \cos(2\pi f_T \cdot t)$$

$$S_{AM} = \hat{S}_T \cos(\omega_T t) + \frac{m}{2} \cos((\omega_T + \omega_M) \cdot t) + \frac{m}{2} \cos((\omega_T - \omega_M) \cdot t)$$

Leistung der Seitenbänder

$$P_{AM} = P_T + 2 \cdot P_{\text{Seitenband}}$$

$$\frac{P_{AM}}{P_T} = 1 + \frac{m^2}{2} \text{ nur für eintonsignale}$$

Legende:

| | | |
|----------------|-------------------|------|
| m | : Modulationsgrad | [] |
| t | : Zeit | [s] |
| f _M | : NF-Frequenz | [Hz] |
| f _T | : HF-Frequenz | [Hz] |

4.4 Zweiseitenband Modulation ZM

Realisierung mit Mischer siehe 4.2

4.5 Einseitenband Modulation EM

Realisierung mit Mischer und nachfolgendem Filter. BEM: Reduziert Bandbreite, aber nicht Sendeleistung

4.6 Modulationsgrad m

$$m = \frac{\hat{S}_M}{\hat{S}_T}$$

4.7 Demodulation

Hüllkurvendetektor für AM m < 100%
Dämpfung des Schwingkreises

$$R_p \approx \frac{R}{2}$$

R_p : Last für den Schwingkreis

Synchrondemodulator (BSP: 1 Ton)

$$S_{NF} \sim \cos(2\pi \cdot f_{NF} \cdot t) \cdot \cos(\varphi_{Loc})$$

Legende:

| | |
|------------------|---|
| S _{NF} | : Demodulierte NF Signal |
| f _{NF} | : Frequenz des NF Signals |
| φ _{Loc} | : Phasenverschiebung gegenüber dem Idealen Trägersignal |
| S _T | : Trägersignal |

4.8 Phasenmodulation (PM)

Phasenmodulation α_P : Modulationskonstante
 η : Phasenhup

$$S_{PM}(t) = \hat{S}_T \cos(\omega_T \cdot t + \alpha_P \cdot s_M(t))$$

Phasenhup
 $\eta = \alpha_P \cdot \hat{S}_M$

4.9 Frequenzmodulation (FM)

Phasenmodulation α_F : Modulationskonstante
 $\Delta\omega_{HF}$: Frequenzhub

$$S_{FM}(t) = \hat{S}_T \cos\left(\omega_T \cdot t + \int_0^t \alpha_F \cdot s_M(t) dt\right)$$

Frequenzhub
 $\Delta\omega_{HF} = \alpha_F \cdot \hat{S}_M$

4.10 Einton - Winkelmodulation (PM/FM)

Eintonwinkelmodulation η : Phasenhup (PM)
 η : Modulationsindex (FM) []
 ω_M : Frequenz Einton [Hz]

$$S_{PM/FM}(t) = \hat{S}_T \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_M \cdot t))$$

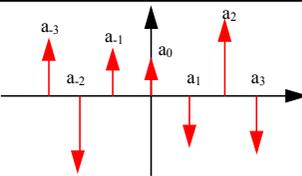
Modulationsindex (FM) ω_T : Frequenz Träger [Hz]
 t : Zeit [t]

$$\eta = \frac{\Delta\omega_{HF}}{\omega_M}$$

Spektrum

$$S_{PM/FM}(t) = \hat{S}_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \cos((\omega_T + n \cdot \omega) \cdot t)$$

wobei

$$J_n(\eta) = (-1)^n \cdot J_{-n}(\eta)$$


The diagram shows a frequency spectrum with a central component a_0 pointing upwards. On either side, there are components a_1 , a_2 , and a_3 . The components a_1 and a_3 point downwards, while a_2 points upwards. This illustrates the alternating signs of the Bessel function coefficients for odd and even orders.

4.11 Praktische Bandbreite (PM/FM)

$$B_{PM/FM} = 2(\eta + 1) \cdot f_M$$

5. Filter

5.1 Frequenzgang aus der Laplacetransformierten Funktion

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s \rightarrow j\omega}$$

5.1.1 Definition und Normierungen

Grenzfrequenz:

$$f_g$$

Normierte Frequenz:

$$P = j\Omega = \frac{j\omega}{\omega_0}$$

Knickfrequenz:

$$\Omega_{oi} = \frac{\omega_{oi}}{\omega_g}$$

Dämpfung:

$$\xi = \frac{1}{2Q}$$

Güte:

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

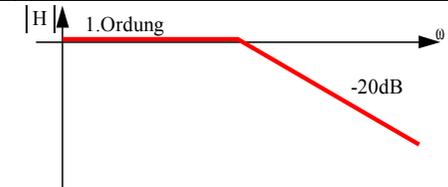
5.2 Tiefpassfilter

1. Ordnung

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{oi}}}$$

$$H(P) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Omega_{oi}} P}$$

$$H(P) = \frac{1}{1 + a_i \cdot P}$$



ω_{oi} : Res.Freq. der i-ten Filterstufe
 Ω_{oi} : normierte Freq. der i-ten Filterstufe
 a_i : Koeffizienten aus Tabelle
 P : Normierte Frequenz

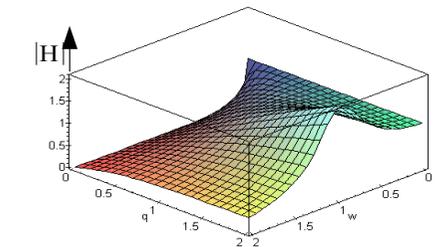
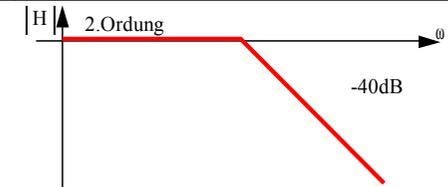
2. Ordnung

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Q_1 \cdot \omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H(P) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_i \cdot \Omega_{oi}} P + \left(\frac{P}{\Omega_{oi}}\right)^2}$$

$$H(P) = \frac{1}{1 + a_i P + b_i P^2}$$

$$a_i = \frac{2\xi}{\Omega_{oi}} \quad b_i = \frac{1}{\Omega_{oi}^2}$$



Abhängigkeit von Güte und Frequenz des Filters

a_i, b_i : Koeffizienten aus Tabelle
 P : Normierte Frequenz

3. Ordnung

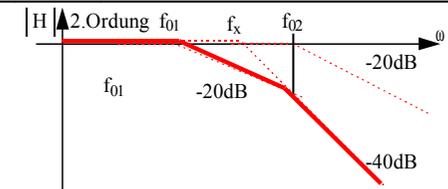
$$H_{3Ord}(P) = H_{1Ord}(P) \cdot H_{2Ord}(P)$$

4. Ordnung

$$H_{4Ord}(P) = H_{2Ord}(P) \cdot H_{2Ord}(P)$$

Bis zu einer Dämpfung von 6dB kann ein Filter 2. Ordnung durch 2. Filter 1. Ordnung realisiert werden.

$$f_x = \sqrt{f_{01} \cdot f_{02}}$$



5.3 Optimierte Tiefpassfiltertypen

Gaussfilter Serie von n Tiefpässen 1. Ordnung

$$H(P) = \left(\frac{1}{1 + \frac{P}{\Omega_{oi}}} \right)^n \quad \Omega_{oi} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Optimierung:

Kein Überschwingen der Schrittantwort

Charakteristik:

N Identische Pole oberhalb von f_g (N Filterstufen 1. Ordnung)

n : Anzahl Filterstufen

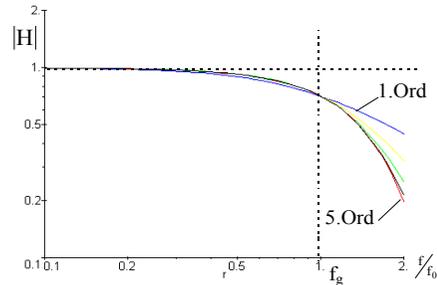
Besselfilter

Optimierung:

optimal flacher Verlauf der Phasenlaufzeit (=optimales Impulsübertragungsverhalten)

Charakteristik:

alle Eigenfrequenzen oberhalb von f_g



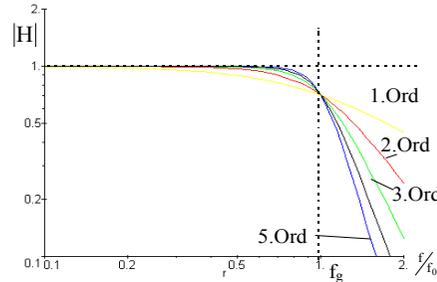
Butterworthfilter

Optimierung:

optimal flacher Verlauf der Dämpfung (Keine Welligkeit)

Charakteristik:

Alle Eigenfrequenzen gleich = f_g



Chebyshev I

Optimierung: optimal steiler Dämpfungsverlauf oberhalb f_g (Welligkeit im Durchlassbereich toleriert)

Charakteristik:

alle Eigenfrequenzen unterhalb f_g

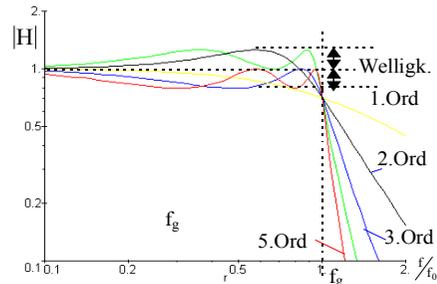
1 Höcker -> 2 Ordnung

2 Höcker -> 4 Ordnung

4 Höcker -> 8 Ordnung

Ungerade Ordnungszahl Höcker sind unter 1.

Geradzahlige Ordnungszahl Höcker sind über 1.



Chebyshev II

Optimierung: optimaler steiler Dämpfungsverlauf oberhalb f_g (Welligkeit im Sperrbereich toleriert)

Charakteristik:

Dämpfung im Durchlassbereich analog zu Butterworth; zusätzlich Nullstellen oberhalb f_g

Chebyshev III

Optimierung: optimal steiler Dämpfungsverlauf oberhalb f_g (Welligkeit im Durchlass und Sperrbereich toleriert)

Charakteristik:

Kombination von Chebyshev I und II

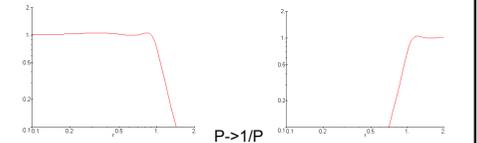
5.4 Transformation Tiefpass \leftrightarrow Hochpass

Allgemein gilt:

$$H_{HP}(P) = H_{TP}\left(\frac{1}{P}\right)$$

$$H_{TP}(P) = H_{HP}\left(\frac{1}{P}\right)$$

Entspricht der Substitution $P \rightarrow 1/P$



5.5 Pol - Nullstellen Diagramm

Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots}$$

durch faktorisieren

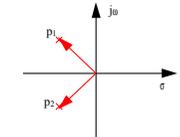
$$H(s) = \frac{(s - z_0)(s - z_1)(s - z_2) \dots}{(s - p_0)(s - p_1)(s - p_2) \dots}$$

z_i : Nullstellen

p_i : Pole

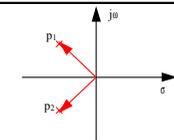
Die Pole u.o Nullstellen sind

- entweder reell
- oder paarweise konj. komplex



5.6 Stabilitätskriterium

Alle Pole liegen in der linken Halbebene



6. Digitalfilter

6.1.1 Allgemein

Zeitbereich

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots$$

Bildbereich

$$y = x(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots) - y(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots)$$

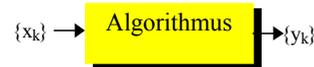
Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{y}{x} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}$$

Frequenzgang

$$H(f) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f/f_s}}$$

- y_k : Diskrete Werte des Ausgangssignal
- x_k : Diskrete Werte des Eingangssignal
- z^{-1} : Verzögerung um einen Schritt
- $H(z)$: Z-Transformierte Funktion
- f_s : Samplingfrequenz [Hz]
- f : Frequenz [Hz]
- a_k, b_k : Koeffizienten []



6.2 FIR- Filter (Finite Impulse Response)

Eigenschaften

- Beliebiges Verhalten realisierbar
- Meist aufwendiger als IIR
- Grundsätzlich stabil

Ordnung des Filters

$$N \approx 5 \cdot \frac{f_s}{B_{\text{rolloff}}}$$

B_{Rolloff} : Rolloff 50% der Amplitude siehe 8.1 [Hz]

f_s : Sampling Frequenz [Hz]

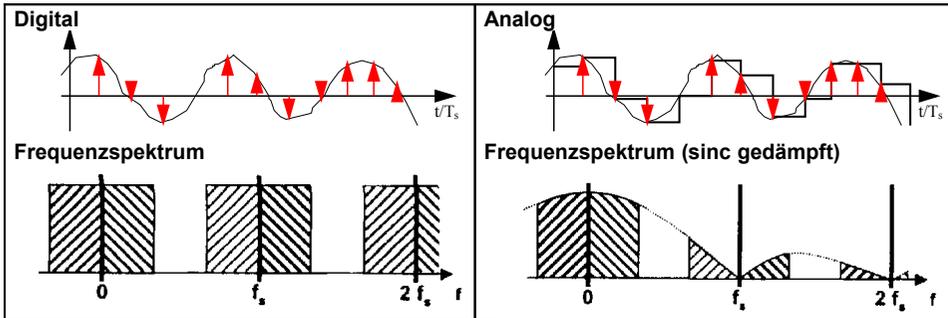
6.3 IIR- Filter (Infinite Impulse Response)

Eigenschaften

- Instabilität möglich
- Verschiedene Strukturvarianten
- Filterordnung vergleichbar mit derjenigen von Analogfiltern

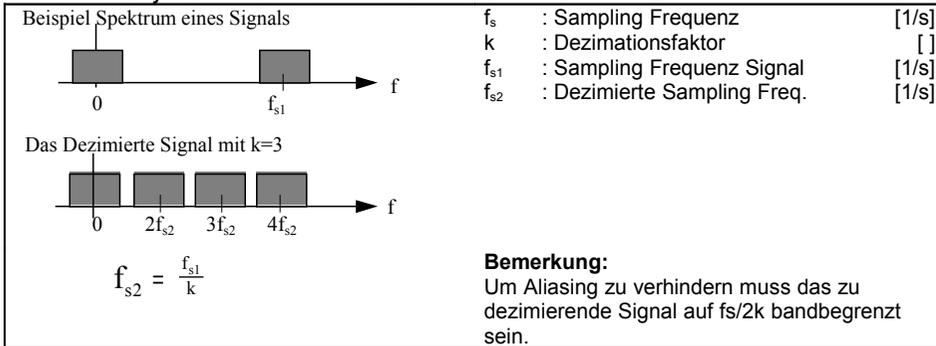
7. Up and Downsampling

7.1 Digital Analog Wandlung mit Hold



7.2 Ganzzahliges Downsampling (Dezimation)

Es wird nur jeder k-te Wert übernommen.



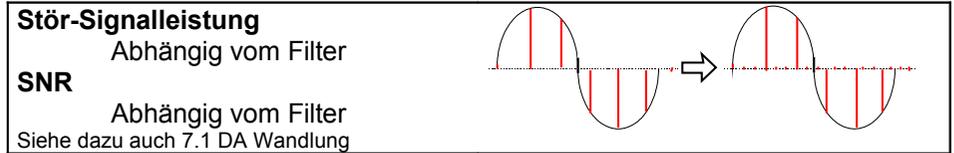
7.3 Upsampling

7.3.1 Abschätzung der Störleistung für sinusförmige Signale

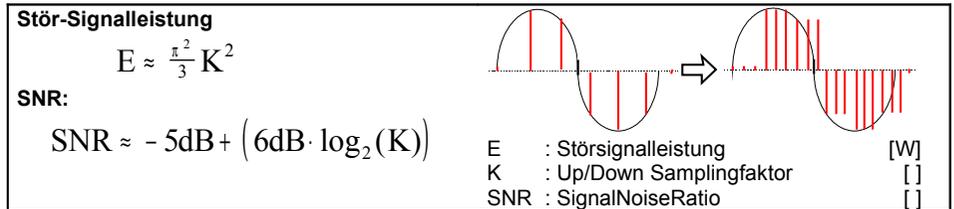
$$K = \frac{f_{s1}}{f_{sig}}$$

f_{sig} : Signalfrequenz [Hz]
 f_{s1} : Abtastfrequenz (vor Upsampling) [Hz]
 K : Up/Down Samplingfaktor []

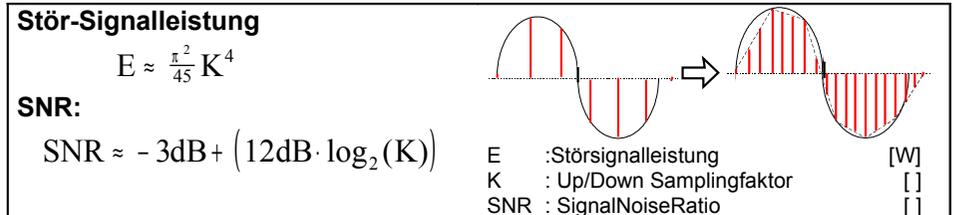
7.3.1 Zero Insert mit Tiefpass Filter



7.3.2 Repeat



7.3.3 Linearinterpolation



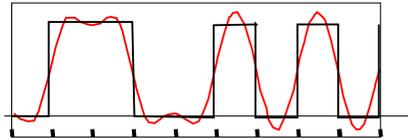
7.4 Up-/Downsampling mit beliebigen Faktoren

Wird durch die Kombination von Up und Downsampling erreicht.

8. Pulse Shaping

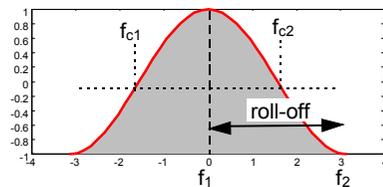
Bei der Übertragung digitaler Signale sind zwei Forderungen zu erfüllen:
 ⇒ Auf der Senderseite müssen schnelle Signalwechsel möglichst vermieden werden um Bandbreite zu reduzieren
 ⇒ Im Empfänger müssen Empfangsstörungen wirksam unterdrücken

Sowohl auf der Sender- wie auch auf der Empfängerseite benötigt man also einen Tiefpassfilter. Dieser Filter soll nur gerade die Grundwelle der kürzesten Impulse durchlassen. Dieses Problem kann am besten mit einem sogenannten Raised-Cosine Filter gelöst werden.



8.1 Raised-Cosine (RC) Filter

Raised-Cosine Filter sind dadurch gekennzeichnet, dass vom Durchlassbereich bis zum Sperrbereich ein **Cosinusförmigen Verlauf** aufweist.



Rolloff Faktor:

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

f_{c1}, f_{c2} : Cutoff Frequenz (Ampl. 50%)
 r : Rollofffaktor
 f_1, f_2 : Rolloffbereich

8.2 Square Root Option

Die bestmögliche Übertragung wird von Impulsen erreicht, wenn zwischen Impulsquelle und Impulsauswertung ein gesamtfilterung eines Raised Cosine Filter wirksam ist.



Somit gilt

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

und damit auch

$$H_1(f) = H_2(f) = \sqrt{H(f)}$$

f : Frequenz [Hz]
 $H()$: Übertragungsfunktion cos-Filter []